GROUPE B

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

NOTATIONS ET RAPPELS

E est un espace vectoriel complexe, de dimension n, identifié à $\mathbb{C}^n$; le $j^{\text{ième}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ est noté e_j.

$\mathcal{A}_n$ est l'algèbre des matrices carrées complexes d'ordre n ; si A est un élément de $\mathcal{A}_n$, $(A)_{ij}$ est l'élément de A, situé à l'intersection de sa $i^{\text{ème}}$ ligne et de sa $j^{\text{ième}}$ colonne. Le symbole de la multiplication des matrices n'est pas écrit.

$(x \mid y)$ est le produit scalaire hermitien canonique de deux éléments x et y de E; il est linéaire par rapport à x, et antilinéaire par rapport à y; on note $|x| = (x \mid x)^{\frac{1}{2}}$.

On admettra que l'expression

$$\| A \| = \max \{ |Ax| / x \in E \text{ et } |x| \leqslant 1 \}$$

définit une norme sur $\mathcal{A}_n$ qui satisfait, pour tous A et B dans $\mathcal{A}_n$, l'inégalité

$$\| AB \| \leqslant \| A \| \| B \| .$$

Si A est une matrice de $\mathcal{A}_n$, A^* désigne son adjointe; celle-ci satisfait les relations

$$(Ax \mid y) = (x \mid A^* y), \quad \forall x, y \in E;$$

$$(A^*)_{ij} = \overline{(A)_{ji}}, \quad \forall i, j \in \{ 1, \ldots, n \} .$$

Une matrice unitaire vérifie la relation

$$U^{-1} = U^* ;$$

deux matrices A et B sont dites unitairement équivalentes, s'il existe une matrice unitaire U telle que

$$A = U^* B U .$$

Une matrice hermitienne vérifie la relation

$$A^* = A ;$$

Une matrice antihermitienne vérifie la relation

$$A^* = - A .$$

Une matrice triangulaire supérieure vérifie

$$(A)_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad i > j ;$$

on dira qu'une matrice triangulaire supérieure est à diagonale réelle si

$$(A)_{ii} \in \mathbb{R}, \quad \forall i \in \{ 1, \ldots, n \} ,$$

et qu'elle est à diagonale strictement positive si, de plus,

$$(A)_{ii} > 0, \quad \forall i \in \{ 1, \ldots, n \} .$$

Si $x_1, x_2, \ldots, x_m$ désignent des vecteurs de E, le sous-espace qu'ils engendrent sera noté

$$< x_1, x_2, \ldots, x_m > .$$

Information sur les systèmes différentiels qui pourra être nécessaire dans les parties II *et* III.

Soient N une norme arbitraire sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^p$, $\mathcal{X}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}$; on dira qu'une fonction f vérifie la condition $\mathcal{L}$, si

$(\mathcal{L})$:

- $(\mathcal{L}1)$: f est une application continue de $\mathcal{U} \times \mathcal{X}$ dans $\mathbb{R}^p$;
- $(\mathcal{L}2)$: pour tout r strictement positif, il existe une constante finie $L(r)$ telle que : quels que soient (u, x, y) dans $\mathcal{U} \times \mathcal{X} \times \mathcal{X}$, qui vérifient $\max (|u|, |x|, |y|) \leqslant r$, on a $N(f(u, x) - f(u, y)) \leqslant L(r)\, N(x - y)$.

On notera fréquemment la dérivation par rapport à la variable réelle t

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} .$$

On appellera solution du système différentiel

$$\dot{x} = f(.\,, x)$$

un couple $(\mathcal{U}_1, x)$, où $\mathcal{U}_1$ est un intervalle ouvert inclus dans $\mathcal{U}$, et x est une fonction continûment dérivable de $\mathcal{U}_1$ dans $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathcal{X}$, tels que

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \forall\, t \in \mathcal{U}_1 ;$$

il n'existe pas d'intervalle ouvert $\mathcal{U}_2$ contenant strictement $\mathcal{U}_1$, et contenu dans $\mathcal{U}$, et de fonction continûment différentiable y de $\mathcal{U}_2$ dans $\mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathcal{X}$, prolongeant x, et vérifiant $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$, pour tout t dans $\mathcal{U}_2$.

On *admettra* le théorème suivant :

Théorème 0. — Soit f satisfaisant la condition $\mathcal{E}$. Alors, quels que soient t_0 dans $\mathcal{U}$, et x_0 dans $\mathcal{X}$, il existe une solution unique $(\mathcal{U}_1, x)$ de $\dot{x} = f(.\,, x)$, satisfaisant la condition initiale

$$x(t_0) = x_0 .$$

Si $(\mathcal{U}_1, x)$ est une solution de $\dot{x} = f(.\,, x)$, on dit que $\mathcal{U}_1$ est l'*intervalle d'existence* de x. Fréquemment, $\mathcal{U}_1$ sera sous-entendu.

Les parties I *et* II, *5e question exceptée, sont indépendantes.*

I

1° Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ une base quelconque de E. Montrer qu'il existe une base orthonormée $q_1, q_2, \ldots, q_n$, et des nombres r_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n)$, complexes, tels que

$$a_k = \sum_{j=1}^{k} r_{jk}\, q_j , \qquad \forall\, k \in \{1, 2, \ldots, n\} .$$

2° Soit A un élément de $\mathcal{A}_n$, qu'on suppose inversible; montrer qu'il existe une matrice unitaire Q, et une matrice R, triangulaire supérieure à diagonale strictement positive, telles que

(I.1) $$A = Q\,R .$$

Montrer que cette décomposition est unique.

Dans tout ce qui suit, une telle décomposition sera appelée « décomposition Q R », et on notera

(I.2) $$Q = \chi(A), \; R = \rho(A) .$$

3° Soit Q une matrice unitaire; que vaut $\| Q \|$?

4° Soit A une matrice inversible. On définit une suite de matrices par

(I.3) $$A_0 = A ; \quad A_{k+1} = \rho(A_k)\, \chi(A_k) .$$

Montrer que cette suite est définie pour tout $k \in \mathbb{N}$, et que $\| A_k \|$ est bornée indépendamment de k.

5° Que peut-on dire de l'ensemble des valeurs propres de A_k ?

Remarque sur les parties II *et* III.

On attend des candidats qu'ils utilisent des techniques d'équations différentielles. Outre que c'est dans l'esprit du problème, ce sont là les techniques les plus rapides pour répondre aux questions. Il est en particulier déconseillé d'utiliser des séries de matrices.

Les techniques d'équations différentielles faisant appel éventuellement à des résultats d'unicité, on pourra utiliser le théorème 0 ci-dessus pour les justifier.

II

1° Soit $\mathcal{U}$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et soient X et Y des applications continûment dérivables de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{A}_n$; montrer les relations suivantes :

(II.1) $$\frac{d}{dt}(X^*) = (\dot{X})^* ;$$

(II.2) $$\frac{d}{dt}(X\,Y) = \dot{X}\,Y + X\,\dot{Y} ;$$

montrer que si X est à valeurs inversibles, X^{-1} est continûment dérivable, et calculer

$$\frac{d}{dt}(X^{-1}).$$

2° Soit M une application continue d'un intervalle $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{A}_n$; on considère le système différentiel à valeurs dans $\mathcal{A}_n$:

(II.3) $$\dot{X} = M(.)\,X , \; X(t_0) = X_0 .$$

a. Montrer que l'application :

$$(t\,,\ X) \longrightarrow M\,(t)\ X$$

satisfait la condition $\mathfrak{L}$; soit $\mathfrak{U}_1$ l'intervalle d'existence de (II.3).

b. Si X_0 est unitaire et M à valeurs antihermitiennes, montrer que X (t) est unitaire, pour tout t dans $\mathfrak{U}_1$. (Dériver $|\ X\,(t)\ x\,|^2$, pour $x \in E$).

c. Si X_0 est triangulaire supérieure, à diagonale strictement positive, et M est à valeurs triangulaires supérieures, à diagonale réelle, montrer que X (t) est triangulaire supérieure, à diagonale strictement positive, pour tout t dans $\mathfrak{U}_1$.

3° On considère l'équation différentielle matricielle :

(II.4) $$\dot{Y} = -\ Y\ M\,(.)\,,\ Y\,(0) = Y_0\,.$$

Soit $\mathfrak{U}_2$ l'intervalle d'existence relatif à (II.4). Montrer que pour tout t dans $\mathfrak{U}_1 \cap \mathfrak{U}_2$, on a :

(II.5) $$Y\,(t)\ X\,(t) = Y_0\ X_0.$$

Comparer $\mathfrak{U}_1$ et $\mathfrak{U}_2$.

Si de plus $X_0\ Y_0 = I$, la matrice identité, montrer que :

(II.6) $$X\,(t)\ Y\,(t) = I\,,\quad \forall\ t \in \mathfrak{U}_1 \cap \mathfrak{U}_2\,.$$

4° Soit A une matrice donnée; soit X la solution de :

(II.7) $$\dot{X} = A\ X\,,\ X\,(0) = I.$$

On admettra que l'intervalle d'existence pour ce problème est R.

a. Montrer que si Z est solution de :

$$\dot{Z} = A\ Z\,,\ Z\,(0) = Z_0\,.$$

alors :

$$Z\,(t) = X\,(t)\ Z_0\,.$$

b. Montrer que, quels que soient s et t dans R, on a l'identité :

$$X\,(s + t) = X\,(s)\ X\,(t).$$

c. Soit Y la solution de :

$$Y = Y\,A\,,\ Y\,(0) = I\,.$$

Montrer que X et Y sont identiques; on pourra considérer :

$$W\,(t) = Y\,(-\ t)$$

et utiliser (II.6).

d. On note, pour X la solution de (II.7) :

(II.8) $$X\,(t) = \varphi(t\,,\ A).$$

Montrer, en utilisant un résultat d'unicité de solution de systèmes différentiels, que, pour tout t et tout r dans R, on a l'identité :

$$\varphi\,(rt\,,\ A) = \varphi\,(t\,,\ rA).$$

On notera :

(II.9) $$\varphi\,(1\,,\ A) = \psi\,(A).$$

e. Montrer que, pour toute matrice inversible B, et tout t :

$$\varphi\,(t,\ B^{-1}\ A\ B) = B^{-1}\ \varphi\,(t, A)\ B$$

(dériver $\varphi\,(-\ t\,,\ B^{-1}\ A\ B)\ B^{-1}\ \varphi\,(t,\ A)\ B$).

5° *a.* On suppose que dans (II.7), la matrice A est hermitienne; montrer que X (t) est hermitienne pour tout t.

Quelles sont les valeurs propres de X (t) ? Ses vecteurs propres ?

On suppose, dans le reste de cette question, que les valeurs propres $\lambda_1\,,\ \lambda_2\,,\ \ldots,\ \lambda_n$ de A satisfont :

(II.10) $$\lambda_1 > \lambda_2 > \ \ldots\ > \lambda_n\,.$$

Soit v_j une base orthonormée de vecteurs propres de A, avec :

(II.11) $$A\ v_j = \lambda_j\ v_j\,,\ \forall\ j \in \{\ 1\,,\ \ldots,\ n\ \}\,.$$

Enfin on suppose que, pour tout $k \in \{\ 1\,,\ 2\,,\ \ldots,\ n-1\ \}$,

(II.12) $$< e_1\,,\ e_2\,,\ \ldots,\ e_k\ > \ \cap\ < v_{k+1}\,,\ v_{k+2}\,,\ \ldots,\ v_n\ > \ = \{\ 0\ \}\,.$$

Avec les notations (II.2), on pose :

$$R\,(t) = \rho\,(X\,(t))\,,\ Q\,(t) = \chi\,(X\,(t))\,.$$

On désigne par $x_j\,(t)$, $q_j\,(t)$ respectivement le $j^{\text{ième}}$ vecteur de X (t) et Q (t).

b. On se donne des nombres complexes b_{kj}, indépendants de t, $1 \leqslant k \leqslant j \leqslant n$, et on définit des vecteurs $z_j(t)$ par la relation :

$$z_j(t) = e^{-t\lambda_j} \sum_{k=1}^{j} b_{kj}\, x_k(t), \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Montrer que les hypothèses (II.10), (II.11) et (II.12) permettent de choisir les b_{kj} de façon que :

$$\lim_{t \to +\infty} (z_j(t) | v_j) = 1, \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Quelle est la limite de $z_j(t)$ quand t tend vers $+\infty$?

c. On définit une matrice $W(t)$ par ses vecteurs colonnes :

$$w_j(t) = z_j(t) / b_{jj}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Soit

$$W(t) = \tilde{Q}(t)\, \tilde{R}(t)$$

la décomposition Q R de W; vers quoi tendent les vecteurs colonnes $\tilde{q}_j(t)$ de $\tilde{Q}_j(t)$ quand t tend vers $+\infty$?

d. Montrer que, pour chaque j, la limite de $q_j(t)$ existe et est un vecteur propre de A relatif à la valeur propre λ_j ; pour cela, on pourra utiliser la matrice $\tilde{Q}$, et l'unicité de la décomposition Q R.

III

Si A et B appartiennent à $\mathcal{A}b_n$, on note

$$[A,B] = AB - BA.$$

1° Montrer que toute matrice admet une décomposition

(III.1) $$A = \pi_1(A) + \pi_2(A).$$

où $\pi_1(A)$ est antihermitienne, et $\pi_2(A)$ est triangulaire supérieure, à diagonale réelle.

Donner une expression explicite de $\pi_1(A)$ et de $\pi_2(A)$.

2° Soient $z_1, z_2, \ldots, z_p$, p nombres complexes, et soit

$$f(X) = \sum_{j=1}^{p} z_j X^j.$$

Montrer que pour toute matrice B inversible,

$$f(B^{-1} X B) = B^{-1} f(X) B.$$

Montrer que si λ est valeur propre de X, $f(\lambda)$ est valeur propre de $f(X)$.

3° Montrer que l'application de $\mathbb{R} \times \mathcal{A}b_n$ dans $\mathcal{A}b_n$, définie par

$$(t, X) \longmapsto [X, \pi_1(f(X))]$$

satisfait la condition $\mathcal{L}$. (On pourra admettre qu'il existe C tel que

$$\| \pi_1(A) \| \leqslant C \| A \|).$$

Soit alors X la solution du système

(III.2) $$\dot{X} = [X, \pi_1(f(X))], \quad X(0) = X_0.$$

Montrer que $X(t)$ est unitairement équivalente à X_0, quel que soit t dans l'intervalle d'existence de (III.2).

4° Soit, pour X défini par (III.2), Q la solution de

(III.3) $$\dot{Q} = Q\, \pi_1(f(X)), \quad Q(0) = I,$$

et R la solution de

(III.4) $$\dot{R} = \pi_2(f(X))\, R, \quad R(0) = I.$$

Montrer, avec les notations (II.8) et (II.9), que

$$Q(t)\, R(t) = \psi(t f(X_0)) ;$$

quel est l'intervalle d'existence de (III.2) ?

5° Si X_0 et $f(X_0)$ sont hermitiennes, et si $f(X_0) = A$ satisfait (II.10), (II.11) et (II.12), montrer que $X(t)$ a une limite quant t tend vers $+\infty$, et que cette limite est une matrice diagonale équivalente à X_0.

6° Soit $A_0 = \psi(f(X_0))$, et A_k déduite de A_0 par la récurrence (I. 3). Montrer que, pour tout k,

$$A_k = \psi(f(X(k))).$$

Sous les hypothèses du III.5°, est-ce que la suite A_k a une limite quand k tend vers $+\infty$? La caractériser si elle existe.

REMARQUE CULTURELLE : *La récurrence* (I.3) *est une méthode numérique effectivement utilisée pour la recherche des vecteurs propres et des valeurs propres d'une matrice. Cette méthode, passablement mystérieuse au premier abord, est reliée, dans la partie* III, *à la méthode des puissances, étudiée dans la partie* II *et qui ne sert d'ordinaire qu'à calculer* quelques *valeurs propres d'une matrice.*